

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ-ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

BÀI TOÁN GIỚI HẠN DÃY SỐ LUYỆN THI OLYMPIC SINH VIÊN

ThS. Nguyễn Thu Hằng

Hà Nội, 12/2019

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ-ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

BÀI TOÁN GIỚI HẠN DÃY SỐ LUYỆN THI OLYMPIC SINH VIÊN

Xác nhận của Bộ môn Toán

Hà Nội, 12/2019

Mục lục

1	Kiến thức cơ sở về dãy số	3
2	Một số bài toán về dãy số	3
2.1	Dạng 1. Những dãy số liên quan đến tổng các số hạng liền trước	3
2.2	Dạng 2. $u_{n+1} = f(u_n)$	4
2.3	Các dãy truy hồi đặc biệt	6
2.4	Dạng 3. Định lý Toeplitz và định lý Stolz	8
3	Bài tập luyện tập	10

MỞ ĐẦU

Kỳ thi Olympic Toán học sinh viên và học sinh toàn quốc là hoạt động thường niên do Bộ Giáo dục và Đào tạo, Liên hiệp các Hội Khoa học và Kỹ thuật Việt Nam, Trung ương Hội sinh viên Việt nam, Hội Toán học Việt Nam, phối hợp cùng một trường đại học trong nước đăng cai tổ chức bắt đầu từ năm 1993. Kỳ thi được tổ chức nhằm góp phần nâng cao chất lượng dạy và học toán, thúc đẩy phong trào học toán trong học sinh, sinh viên, qua đó phát hiện, bồi dưỡng niềm say mê toán học của sinh viên, học sinh giỏi toán trong các trường đại học, cao đẳng, học viện và trong các trường thuộc khối Trung học phổ thông chuyên. Bên cạnh đó, kì thi cũng tạo cơ hội giao lưu giữa các học sinh, giáo viên khối Trung học phổ thông chuyên với các sinh viên và giảng viên toán tại các trường đại học, cao đẳng và học viện trên cả nước.

Hàng năm, Sinh viên trường Đại học Mở - Địa chất đều tham gia kỳ thi và có nhiều năm đạt được giải cao. Tuy nhiên, để đạt được kết quả tốt, sinh viên sẽ phải tự học rất nhiều. Việc cung cấp tài liệu, hướng dẫn sinh viên có thể tự ôn tập là rất quan trọng. Với mục đích bổ sung thêm vào kho bài giảng luyện thi olympic sinh viên của bộ môn Toán, báo cáo của tôi xin trình bày một số bài toán về giới hạn dãy số.

Nội dung báo cáo gồm ba phần:

Phần 1. Kiến thức cơ sở về dãy số

Phần 2. Một số bài toán về dãy số

Phần 3. Bài tập luyện tập

1 Kiến thức cơ sở về dãy số

Định nghĩa 1.1. Dãy số là một ánh xạ từ tập các số tự nhiên vào tập các số thực

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Đặt $u_n = f(n)$ và dùng kí hiệu $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ để chỉ dãy số. Dãy số $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ được gọi là

- dương (âm) nếu $u_n > 0$ ($u_n < 0$) với mọi n .
- không âm (không dương) nếu $u_n \geq 0$ ($u_n \leq 0$) với mọi n .
- đơn điệu tăng (giảm) nếu $u_{n+1} \geq u_n$ ($u_{n+1} \leq u_n$) với mọi n .
- tăng (giảm) thực sự nếu $u_{n+1} > u_n$ ($u_{n+1} < u_n$) với mọi n .
- bị chặn nếu tồn tại $C > 0$ sao cho $|u_n| \leq C, \forall n$.
- hội tụ đến L nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại n_0 sao cho $|a_n - L| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$. Khi đó ta viết $\lim u_n = L$.
- dãy Cauchy (dãy cơ bản) nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại n_0 sao cho $|a_m - a_n| < \varepsilon, \forall n, m \geq n_0$.

Các tiêu chuẩn hội tụ

1. (Định lý hội tụ đơn điệu) Mọi dãy số đơn điệu tăng (giảm) và bị chặn trên (dưới) đều có giới hạn hữu hạn.
2. (Định lý kẹp) Cho ba số thực $\{u_n\}, \{v_n\}, \{z_n\}$.
Nếu $\lim u_n = \lim v_n = L$ và $u_n \leq z_n \leq v_n$ với $n \geq n_0$ nào đó thì $\lim z_n = L$.
3. Dãy $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy Cauchy

Định lý 1.2. (Định lý Bolzano-Weierstrass) Mọi dãy bị chặn đều có một dãy con hội tụ

2 Một số bài toán về dãy số

2.1 Dạng 1. Những dãy số liên quan đến tổng các số hạng liền trước

Với những dãy này, ta chỉ cần tính biểu thức với $n+1$ rồi trừ đi biểu thức với n thì có thể triệt tiêu lượng lớn các số hạng.

Ví dụ 1. Cho dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định như sau

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n &= n^2 \cdot x_n. \end{aligned}$$

Tính x_{2016} .

Lời giải. Ta có

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = n^2 \cdot x_n. \quad (1)$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} = (n+1)^2 \cdot x_{n+1} \quad (2)$$

Lấy (2) trừ (1) ta được

$$\begin{aligned} (n+1)^2 \cdot x_{n+1} - n^2 \cdot x_n &= x_{n+1} \\ \Leftrightarrow n^2 \cdot x_n &= (n^2 + 2n) x_{n+1} \\ \Leftrightarrow x_{n+1} &= \frac{n}{n+2} x_n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Suy ra } \prod_{i=1}^n x_{i+1} &= \prod_{i=1}^n \frac{i}{i+2} x_i \\ \Leftrightarrow x_{n+1} &= \frac{2.n!}{(n+2)!} x_1 = \frac{4}{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } x_n = \frac{4}{n(n+1)}. \text{ Suy ra } x_{2006} = \frac{4}{2006.2007}. \quad \square$$

Ví dụ 2. Cho dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ thỏa mãn

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{2015}{6} \\ \frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \dots + \frac{x_n}{n} &= \frac{n+1}{2} x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.\end{aligned}$$

Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} (2015 + n)x_n$

Lời giải.

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \dots + \frac{x_n}{n} = \frac{n+1}{2} x_n \quad (1)$$

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \dots + \frac{x_n}{n} + \frac{x_{n+1}}{n+1} = \frac{n+2}{2} x_{n+1} \quad (2)$$

Lấy (2) trừ (1) ta được

$$\begin{aligned}\frac{n+2}{2} x_{n+1} - \frac{n+1}{2} x_n &= \frac{x_{n+1}}{n+1} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{n+2}{2} - \frac{n+1}{2} \right) x_{n+1} &= (n+1)x_n \\ \Leftrightarrow x_{n+1} &= \frac{(n+1)^2}{n(n+3)} x_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Suy ra } \prod_{i=1}^n x_{i+1} &= \prod_{i=1}^n \frac{(i+1)^2}{i(i+3)} x_i \\ \Rightarrow x_{i+1} &= \frac{2.3.(n+1)}{(n+2)(n+3)} x_1 = \frac{2015(n+1)}{(n+2)(n+3)}\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} (2015 + n)x_n = 2015. \quad \square$$

2.2 Dạng 2. $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Nếu f là hàm đơn điệu tăng thì $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1})$, nên ta thấy $u_{n+1} - u_n$ cùng dấu với $u_1 - u_0$. Như vậy dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ đơn điệu tăng hoặc giảm phụ thuộc vào u_1 và u_0 . Trong trường hợp này chỉ còn phải xét xem $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bị chặn trên hay bị chặn dưới hay không.
2. Nếu f là hàm đơn điệu giảm thì $f \circ f$ là hàm tăng. Vậy hai dãy con $\{u_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ và $\{u_{2k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ đều đơn điệu tăng hoặc giảm phụ thuộc vào dấu của $u_4 - u_2$ và $u_3 - u_1$. Hơn nữa $u_4 - u_2 = f(u_3) - f(u_1) > 0$ nếu $u_3 < u_1$ và $u_4 - u_2 = f(u_3) - f(u_1) < 0$ nếu $u_3 > u_1$ do f nghịch biến. Vậy nên hai dãy con $\{u_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ và $\{u_{2k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ đều đơn điệu ngược chiều nhau
3. Nếu f là hàm liên tục là $\lim u_n = l$ thì suy ra $f(l) = l$. Ta có thể giải phương trình $f(l) = l$ để tìm giới hạn dãy số

Mệnh đề 2.1. Cho f khả vi trên \mathbb{R} . Giả sử tồn tại các số $p > 0$ và $q \in (0, 1)$ sao cho $|f(x) \leq p|$ và $|f'(x)| \leq q$. Khi đó dãy số $x_0 = a, x_{n+1} = f(x_n)$ hội tụ.

Chứng minh. Theo định lý Lagrange ta có $|f(x) - f(y)| = |f'(z)||x - y| \leq q|x - y|$, trong đó z nằm giữa x và y .

Xét hàm $g(x) = f(x) - x$ có $g(p) = f(p) - p \leq 0$ và $g(-p) = f(-p) + p \geq 0$. Suy ra, $g(x)$ liên tục, có nghiệm trong $[-p, p]$.

Ta chứng minh $g(x)$ có nghiệm duy nhất. Thật vậy, giả sử $g(x)$ có hai nghiệm $u < v$. Khi đó

$$|u - v| = |f(u) - f(v)| = |f'(t)||u - v| \leq q|u - v| < |u - v| \text{ (mâu thuẫn) }.$$

Vậy, phương trình $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất L . Ta có

$$|u_n - L| = |f(u_{n-1}) - f(L)| \leq q|u_{n-1} - L| \leq \dots \leq q^n|u_0 - L|$$

Lấy lim hai vế dễ dàng suy ra $\lim u_n = L$. □

Ví dụ 3. Cho dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi $x_1 = a, x_{n+1} = \frac{2011}{3} \ln(x_n^2 + 2011^2) - 2011^2$.

Chứng minh rằng $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ có giới hạn.

Lời giải. Xét hàm $f(x) = \frac{2011}{3} \ln(x^2 + 2011^2) - 2011^2$. Ta có

$$|f'(x)| = \left| \frac{2011}{3} \cdot \frac{2x}{x^2 + 2011^2} \right| \leq \left| \frac{2011}{3} \cdot \frac{2x}{2 \cdot 2011 \cdot x} \right| = \frac{1}{3}.$$

Xét $g(x) = x - f(x)$ có $g(0) < 0$ và $g(-2011^2) > 0$ nên phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm $L \in (-2011^2, 0)$. $g(x)$ lại đồng biến trên $(-2011^2, 0)$ nên nghiệm này là duy nhất.

Theo định lý Lagrange

$$|x_{n+1} - L| = |f(x_n) - f(L)| = |f'(z)||x_n - L| \leq \frac{1}{3}|x_n - L|, z \text{ nằm giữa } x_n \text{ và } L.$$

Suy ra

$$|x_n - L| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} |x_1 - L|$$

Cho $n \rightarrow \infty$ ta được $\lim u_n = L$. □

Ví dụ 4. Cho dãy $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi $u_1 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = \frac{\pi}{2019} - \frac{1}{2} \arctan u_n$. Chứng minh rằng dãy đã cho hội tụ.

Lời giải. Xét hàm $f(x) = \frac{\pi}{2019} - \frac{1}{2} \arctan x$, là hàm liên tục trên \mathbb{R} .

$$|f'(x)| = \left| \frac{1}{2(1+x^2)} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Đặt $g(x) = f(x) - x$. Khi đó, $g(x)$ là hàm liên tục trên \mathbb{R} .

$$g'(x) = 1 - f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Suy ra, $g(x)$ đồng biến trên \mathbb{R} . Hơn nữa

$$\begin{aligned} g(0) &= -f(0) = -\frac{\pi}{2019} < 0 \\ g\left(\frac{\pi}{2019}\right) &= \frac{\pi}{2019} - \frac{\pi}{2019} + \arctan \frac{\pi}{2019} > 0 \end{aligned}$$

Suy ra, phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm $c \in \left(0, \frac{\pi}{2019}\right)$. Do $g(x)$ đồng biến nên nghiệm này là duy nhất. Áp dụng định lý Lagrange, tồn tại z nằm giữa 0 và $\frac{\pi}{2019}$ sao cho

$$|u_{n+1} - c| = |f(u_n) - f(c)| = |f'(z)||u_n - c| \leq \frac{1}{2}|u_n - c|.$$

Tiếp tục áp dụng định lý Lagrange ta được

$$|u_{n+1} - c| = |f(u_n) - f(c)| = |f'(z)||u_n - c| \leq \frac{1}{2}|u_n - c| \leq \dots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_1 - c|.$$

Cho $n \rightarrow \infty$ ta được dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ và có giới hạn là c . □

2.3 Các dãy truy hồi đặc biệt

1. Dãy $u_{n+1} = a.u_n^2 + b.u_n + c$

Xét hàm $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Nếu $f'(x) > 0$ thì $f(x)$ đồng biến và do đó dãy đơn điệu. Trong trường hợp này ta chỉ cần chứng minh dãy bị chặn. Chú ý rằng nếu dãy có giới hạn L thì sẽ là nghiệm của phương trình $L = a.L^2 + b.L + c$. Ta có thể dựa vào phương trình này để chứng minh dãy bị chặn (bởi chính nghiệm của phương trình đó) hay không bị chặn.
- Nếu $f'(x)$ đổi dấu thì ta xét xem liệu có tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $|f'(x)| < c$ hay không. Nếu tồn tại c như trên thì bài toán cũng được giải quyết

2. Dãy số phân tuyến tính $x_{n+1} = \frac{ax_n + b}{cx_n + d}$.

Xét phương trình $L = \frac{a.L + b}{c.L + d} \Leftrightarrow cL^2 + (d - a)L - b = 0$ có $\Delta = (d - a)^2 + 4bc$.

- Nếu $\Delta < 0$, dãy phân kỳ.
- Nếu $\Delta > 0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt α, β .
 - Nếu $x_1 = \alpha$ thì $x_n = \alpha, \forall n$.
 - Nếu $x_1 \neq \alpha$, đặt $X_n = \frac{x_n - \beta}{x_n - \alpha}$, ta được $X_{n+1} = \lambda X_n$
- Nếu $\Delta = 0$, phương trình có nghiệm kép λ . Đặt $X_n = \frac{1}{x_n - \lambda}$ ta được $\{X_n\}$ là cấp số cộng.

Ví dụ 5. Cho dãy $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ xác định bởi $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - 1, \forall n \geq 1$. Tìm $\lim u_n$.

Lời giải. Để chứng minh được $-1 \leq u_n \leq \frac{-1}{2}, \forall n \geq 2$.

Xét $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1, x \in \left(-1, \frac{-1}{2}\right)$ có $f'(x) = x$.

Suy ra $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}, x \in \left(-1, \frac{-1}{2}\right)$.

Đặt $g(x) = x - f(x)$ có $g'(x) = 1 - f'(x) > 0$ nên $g(x)$ là hàm đồng biến $\forall x \in (-1, 0)$.

$$g(0) = 0 - f(0) = 1 > 0$$

$$g(-1) = -1 - f(-1) = \frac{-1}{2} < 0.$$

Suy ra tồn tại $c \in (-1, 0)$ sao cho $f(c) = c$ và do $g(x)$ đồng biến nên c là duy nhất. Giải phương trình $x = \frac{1}{2}x^2 - 1$ ta tìm được $c = 1 - \sqrt{3}$.

Áp dụng định lý Lagrange ta có

$$|u_{n+1} - c| = |f(u_n) - f(c)| = f'(z)|u_n - c| \leq \frac{1}{2}|u_n - c| \leq \dots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_1 - c|.$$

Cho $n \rightarrow \infty$ ta được $\lim u_n = c$. □

Ngoài cách đánh giá như trên ta còn có thể đánh giá như sau

$$|u_{n+1} - c| = \left| \frac{1}{2}u_n^2 - 1 - \left(\frac{1}{2}c^2 - 1 \right) \right| = \frac{1}{2}|u_n + c||u_n - c|.$$

Vì $-1 < u_n < 0$ nên $-\sqrt{3} < u_n + c < 1 - \sqrt{3}$. Suy ra $\frac{1}{2}|u_n + c| < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$. Ta được

$$0 \leq |u_{n+1} - c| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}|u_n - c| < \dots < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n |u_1 - c|.$$

Theo định lý kẹp thì $\lim u_n = c$.

Ví dụ 6. Cho dãy số $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi $u_0 \in \mathbb{R}^+$, $u_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n^2 + 8)$. Tìm điều kiện của u_0 để dãy hội tụ.

Lời giải. Dễ thấy $u_n > 0$, $\forall n$. Xét hàm $f(x) = \frac{1}{6}(x^2 + 8)$ có $f'(x) = \frac{x}{3} > 0$, $\forall x > 0$. Suy ra $f(x)$ đồng biến với mọi $x > 0$.

Phương trình $f(x) = x$ có 2 nghiệm $x = 2$ và $x = 4$

- Nếu $u_0 \in (0, 2)$ thì dễ thấy $u_n \in (0, 2)$ với mọi n .

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{6}(u_n^2 + 8) - u_n = \frac{1}{6}(u_n - 2)(u_n - 4) \geq 0.$$

Suy ra dãy số $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy tăng, bị chặn trên bởi 2 và có giới hạn là 2.

- Nếu $u_0 \in (2, 4)$ thì $u_n \in (2, 4)$, $\forall n$, tương tự trên $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy giảm, bị chặn dưới bởi 2 và có giới hạn là 2.
- Nếu $u_0 \in (4, +\infty)$ thì $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy tăng và $u_n > 4$, $\forall n$ nên không thể hội tụ về 2 hay 4. Trường hợp này dãy phân kì.
- Nếu $u_0 = 2$ hoặc $u_0 = 4$ thì dãy trở thành dãy hằng số và hội tụ.

Vậy $u_0 \in [0, 4]$ thì dãy đã cho hội tụ. □

Ví dụ 7. Cho dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi công thức $a_0 \in \mathbb{R}$, $2a_{n+1} - 2a_n + a_n^2 = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$

a) Chứng minh rằng dãy đơn điệu.

b) Tìm điều kiện của a_0 để dãy hội tụ.

Lời giải. a) Dễ thấy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ đơn điệu giảm vì $a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2}{2} \leq a_n$

b) Giới hạn nếu có của dãy phải là nghiệm của phương trình $L = L - \frac{L^2}{2} \Leftrightarrow L = 0$.

Mặt khác nếu $a_{n+1} > L \Leftrightarrow a_n - \frac{a_n^2}{2} > 0 \Leftrightarrow a_n \in (0, 2)$.

- Trường hợp 1. Nếu $a_0 < 0$, bằng quy nạp dễ thấy $a_n < 0$, $\forall n$. Suy ra dãy (a_n) đơn điệu giảm, mọi phần tử đều nhỏ hơn 0 nên không thể hội tụ về 0.
- Trường hợp 2. Nếu $a_0 > 2$ thì $a_1 = a_0 - \frac{a_0^2}{2} < 0$ và bằng quy nạp có thể thấy $a_n < 0$, $\forall n > 1$. Vậy trong trường hợp này dãy cũng không thể hội tụ.
- Trường hợp 3. Nếu $0 \leq a_0 \leq 2$, dễ chứng minh được bằng quy nạp $0 \leq a_n \leq 2$. Do đó dãy bị chặn, kết hợp với dãy đơn điệu giảm nên dãy hội tụ.

□

Ví dụ 8. Cho dãy $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi công thức $u_1 = a$, $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$.

a) Tìm a để dãy hội tụ.

b) Tính giới hạn trong trường hợp hội tụ.

Lời giải. Do $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)^2 \geq 0$ nên dãy (u_n) là dãy tăng.

Nếu dãy hội tụ đến L thì L là nghiệm của phương trình $L = L^2 - L + 1 \Leftrightarrow L = 1$.

Ta có $u_{n+1} > L \Leftrightarrow u_n^2 - u_n + 1 > 1 \Leftrightarrow$ hoặc $u_n < 0$ hoặc $u_n > 1$.

- Trường hợp 1. Nếu $a > 1$ thì dãy u_n là dãy tăng và có các phần tử lớn hơn 1 nên không thể hội tụ về 0 hay 1.
- Trường hợp 2. Nếu $a < 0$ thì $u_2 = a^2 - a + 1 > 1$. Tương tự trên, dãy phân kì.
- Trường hợp 3. Nếu $0 \leq a \leq 1$ thì $0 \leq u_n \leq 1$, $\forall n$. Suy ra dãy bị chặn, kết hợp với dãy (u_n) tăng ta được dãy (u_n) hội tụ.

□

Ví dụ 9. Cho dãy số $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi $u_0 = 1, u_n = \frac{-1}{3 + u_{n-1}}, n = 1, 2, \dots$

Chứng minh rằng dãy $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ có giới hạn và tìm $\lim u_n$.

Chứng minh. Xét phương trình $L = \frac{-1}{3 + L}$ có 2 nghiệm phân biệt $\alpha = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$ và $\beta = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$.

Đặt $X_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$. Ta có

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} = \frac{\frac{-1}{3 + u_n} - \alpha}{\frac{-1}{3 + u_n} - \beta} = \frac{-1 - \alpha(3 - u_n)}{-1 - \beta(3 - u_n)} \\ &= \frac{-(1 + 3\alpha + \alpha^2) - \alpha(u_n - \alpha)}{-(1 + 3\beta + \beta^2) - \beta(u_n - \beta)} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = \frac{\alpha}{\beta} X_n. \end{aligned}$$

Suy ra $X_n = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n X_0 \rightarrow 0$ vì $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| < 1$.

Mặt khác, từ $X_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$ tính được $u_n = \frac{\beta X_n - \alpha}{X_n - 1}$.

Vậy $\lim u_n = \alpha = \frac{\sqrt{5} - 3}{2}$. □

Ví dụ 10. Cho $a_1 > 0$ và dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi $a_{n+1} = \frac{6a_n + 4}{a_n + 3}$.

a) Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ.

b) Tìm giới hạn của dãy.

Lời giải. Xét phương trình $L = \frac{L + 4}{L + 3}$ có 2 nghiệm phân biệt $\alpha = 4$ và $\beta = -1$.

Đặt $X_n = \frac{a_n - 4}{a_n + 1}$. Ta có

$$X_{n+1} = \frac{a_{n+1} - 4}{a_{n+1} + 1} = \frac{\frac{6a_n + 4}{a_n + 3} - 4}{\frac{6a_n + 4}{a_n + 3} + 1} = \frac{2a_n - 8}{7a_n + 7} = \frac{2}{7} \frac{a_n - 4}{a_n + 1} = \frac{2}{7} X_n.$$

Suy ra $X_n = \left(\frac{2}{7}\right)^{n-1} X_1$. Do đó, dãy $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ và có giới hạn bằng 0.

Mặt khác, từ $X_n = \frac{a_n - 4}{a_n + 1}$ ta tính được $a_n = \frac{X_n + 4}{1 - X_n}$. Suy ra dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ có giới hạn bằng 4. □

2.4 Dạng 3. Định lý Toeplitz và định lý Stolz

Định lí 2.2. (Định lý Toeplitz) Cho $\{c_{n,k}\}$ là một bảng các số thực thỏa mãn

1. $c_{n,k} \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty, \forall k \in \mathbb{N}$.
2. $\sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} \rightarrow 1$ khi $n \rightarrow \infty$.
3. Tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho với mọi số nguyên dương n thì

$$\sum_{k=1}^n |c_{n,k}| \leq C.$$

Khi đó mọi dãy hội tụ $\{a_n\}$ thì dãy $\{b_n\}$ xác định bởi $b_n = \sum_{k=1}^n c_{n,k} a_k$ cũng hội tụ và $\lim b_n = \lim a_n$.

Hệ quả 2.3. 1. Nếu $\lim a_n = a$ thì $\lim \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$.

2. Nếu $\lim a_n = +\infty$ thì $\lim \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \infty$.

Định lý 2.4. (định lý Stolz) Cho $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ và $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ là hai dãy thỏa mãn:

1. $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy tăng thực sự đến $+\infty$.
2. $\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = g$.

Khi đó $\lim \frac{x_n}{y_n} = g$.

Hệ quả 2.5. Lấy $y_n = n$, khi đó

1. Nếu $\lim(x_{n+1} - x_n) = a$ thì $\lim \frac{x_n}{n} = a$.
2. Nếu $\lim \left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \right) = a$ thì $\lim \frac{1}{n x_n} = a$.

Ví dụ 11. Cho $\lim a_n = a$, tính $\lim \left(\frac{a_n}{1} + \frac{a_{n-1}}{2} + \dots + \frac{a_1}{2^{n-1}} \right)$.

Lời giải. Áp dụng định lý Toeplitz với $c_{n,k} = \frac{1}{2^{n-k+1}}$ ta được

$$\lim \left(\frac{a_n}{1} + \frac{a_{n-1}}{2} + \dots + \frac{a_1}{2^{n-1}} \right) = 2a.$$

□

Ví dụ 12. Cho $\lim a_n = a$.

- a) Tìm $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} \left(a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{n}} \right)$
- b) Tìm $\lim \frac{1}{\ln n} \left(\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_n}{n} \right)$

Lời giải. a) Áp dụng định lý Stolz cho $x_n = a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ và $y_n = \sqrt{n}$.

Với chú ý

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim \frac{\frac{a_{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \lim \frac{a_{n+1}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{n+1}} = 2a.$$

b) Áp dụng định lý Stolz cho $x_n = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_n}{n}$ và $y_n = \ln n$ với chú ý

$$\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim \frac{\frac{a_{n+1}}{(n+1)}}{\ln \left(\frac{n+1}{n} \right)} = \lim \frac{a_{n+1}}{\ln \left(\frac{n+1}{n} \right) + \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)^n} = a.$$

□

Để tìm số β sao cho dãy $\frac{x_n}{n^\beta}$ có giới hạn, ta xét hiệu $x_{n+1}^\gamma - x_n^\gamma$, trong đó $\gamma = \frac{1}{\beta}$ và tìm giới hạn của hiệu này.

Ví dụ 13. Cho dãy $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n^2}$, $\forall n > 1$. Tìm $\lim u_n \sqrt{n}$.

Lời giải. Đầu tiên ta sẽ tính $\lim u_n$.

Để thấy $u_n > 0$, $\forall n$ và $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n^2} < \frac{u_n}{1} = u_n$. Suy ra $\{u_n\}$ là dãy giảm.

Vậy dãy $\{u_n\}$ hội tụ về a là nghiệm của phương trình $a = \frac{a}{1 + a^2}$. Giải ra ta được $a = 0$.

Xét hiệu

$$\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{u_n^2 - u_{n+1}^2}{u_n^2 \cdot u_{n+1}^2} = \frac{u_n^2 - \left(\frac{u_n}{1+u_n^2}\right)^2}{u_n^2 \cdot \left(\frac{u_n}{1+u_n^2}\right)^2} = u_n^2 + 2.$$

Suy ra, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \cdot u^2} = 2$. Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

□

3 Bài tập luyện tập

Bài 1. Cho dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ thỏa mãn $x_1 = 2015, \frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \dots + \frac{x_n}{n} = (n+2016)x_{n+1}$. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$.

Bài 2. Cho dãy số $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi $a_1 = -4, a_{n+1} = \frac{2(2a_n + 1)}{a_n + 3}, \forall n \geq 1$. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Bài 3. Cho dãy số $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi $a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{3a_n + 1}{a_n + 3}, \forall n \geq 1$. Tìm số hạng tổng quát của dãy.

Bài 4. Cho dãy số $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi $a_1 = a, a_{n+1} = \frac{43a_n - 425}{a_n + 1}, \forall n \geq 1$.

a) Tìm a để dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy hằng.

b) Tìm a để dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ hội tụ.

Bài 5. Cho dãy số $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi $a_0 = 0, a_{n+1} = \sqrt{3 - \sqrt{3 + a_n}}$. Chứng minh rằng dãy hội tụ.

Bài 6. Cho dãy số $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi $a_1 = 2, a_{n+1} = \sqrt{2018x_n - 2017}, \forall n > 1$. Chứng minh rằng dãy hội tụ và tìm giới hạn đó.

Bài 7. Cho dãy số $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi $a_1 = a, a_{n+1} = a_n + a_n^5$.

a) Chứng minh rằng nếu $a > 0$ thì dãy tăng ngặt và nếu $a < 0$ thì dãy giảm ngặt.

b) Nếu $a \neq 0$. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{u_{n+1} - u_n^3}{u_n}} - u_n^2 + 2 \right)$

Bài 8. Cho dãy số $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi $a_0 = a \in \mathbb{R}, a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$. Với giá trị nào của a thì dãy hội tụ.

KẾT LUẬN

Báo cáo đã trình bày tóm tắt lý thuyết về dãy số và đưa ra một số dạng bài tập quen thuộc trong luyện thi olympic sinh viên phần dãy số, đồng thời đưa ra một vài cách giải tổng quát, dễ hiểu. Đây là một tài liệu có thể giúp sinh viên ôn tập phần giới hạn dãy số tốt hơn.

Trong tương lai, để hoàn thiện giáo án luyện thi olympic môn giải tích, tôi sẽ cố gắng tổng hợp thêm nhiều dạng bài, đưa ra nhiều cách giải tổng quát giúp sinh viên dễ tiếp cận hơn.

Tài liệu

- [1] W.J.Kaczknor - M.T. Nowak, *Bài tập giải tích I*, NXB Đại học Sư Phạm Hà Nội, 2003.
- [2] Kỷ yếu kỳ thi Olympic Toán Sinh viên các năm 2015, 2016, 2017, 2018.